Nombres complexes
Fiche de résumé

Il existe un ensemble noté C et appelé ensemble des nombres complexes, qui vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble C contient l'ensemble R des nombres réels ;
- Il existe dans C une addition et une multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans R ;
- Il existe dans C un nombre complexe noté i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$;

Forme algébrique $z = a + ib$

- Le réel a s'appelle la partie réelle de z, le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z.
- $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.
- Un complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
- Un complexe est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle.
- 0 est le seul nombre complexe qui est réel et imaginaire pur.
- $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.
- $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$

Affixe

A tout point M de coordonnées (x,y) on associe le complexe $x + iy$, noté z_M et appelé affixe de M.

Pour tous points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$

Conjugué

le conjugué de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z$ $\quad\quad$ $\overline{(-z)} = -\overline{z}$
- $z = a + ib$, avec a et b réels: $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\text{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\text{Im}(z)$
- $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ $\quad\quad$ $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$ $\quad\quad$ $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad\quad$ $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$ $\quad\quad$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $\quad\quad$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

Nombres complexes
Fiche de résumé

Module

- $| z | = | a + ib | = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z| = |\overline{z}|$ $\quad$ $|-z| = |z|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ $\quad$ $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ $\quad$ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $AB = | z_B - z_A|$

Résolution de az² + bz + c = 0, avec a ,b , c réels et a non nul.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$,

si $\Delta = 0$, une solution réelle est $-\frac{b}{2a}$

si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Argument d'un nombre complexe non nul

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit le complexe z non nul, de point image M.

Arg(z) = mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Soit z un complexe non nul

- z est réel ($z \in \mathbb{R}$) si et seulement si $\arg(z) = 0\ [\pi]$
- z est imaginaire pur ($z \in i\mathbb{R}$) si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ $\quad$ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(z_1 \times z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ modulo 2π
- $\arg(z^2) = \arg(z \times z) = \arg(z) + \arg(z) = 2\arg(z)\ [2\pi]$ $\quad$ $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$ $\quad$ $\arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2)\ [2\pi]$

Forme trigonométrique

Soit z = a + ib un nombre complexe de module ρ et d'argumentθ, alors **z = ρ (cos θ + i sin θ),**
Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \quad \text{d'où } z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique:

- $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$

Nombres complexes
Fiche de résumé

Angle orienté de vecteurs

A, B, C, D étant des points distincts d'affixes respectives a, b , c, d alors
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$

Notation exponentielle : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$ $\quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

$|e^{i\theta}| = 1$ $\quad \arg(e^{i\theta}) = \theta$

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ Formule de Moivre d'où $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Transformations

- L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b est
  $z' = z + b$.
- L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est
  $z' - \omega = e^{i\theta} \times (z - \omega)$.
- L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k réel non nul est
  $z' - \omega = k \times (z - \omega)$.